# MATRICES Y TRANSFORMACIONES LINEALES 2

En el video anterior repasamos qué eran los vectores, y vimos que los sistemas de ecuaciones lineales se podían convertir en ecuaciones vectoriales. En estas, su lado izquierdo se puede expresar mediante funciones que toman un vector (x, y) y lo transforman en estos vectores. Estas funciones **transforman** de manera **lineal**, así que les decimos “transformaciones lineales”, y las podemos expresar a través de **matrices** que recopilan los coeficientes del vector de salida. Podemos decir que estas **matrices** se aplican sobre un vector para **transformarlo** en otro vector de manera **lineal**.

Pero hay varios detalles importantes que no mencioné antes, sobre cómo exactamente las matrices transforman los vectores, y de eso va a tratar este video.

Algunos de estos detalles los cubre el YouTuber 3Blue1Brown en su serie “Esencia del Álgebra Lineal”, la cual les recomiendo muchísimo que vean.

Ahora sí, comencemos con el video.

## Dimensión de una matriz

Una transformación lineal toma un vector y lo transforma en otro, de manera lineal. En este contexto, esto significa que cada componente del vector salida es una combinación lineal de las componentes del vector entrada. Los coeficientes de estas combinaciones lineales, se pueden recopilar en una matriz, que decimos que representa la transformación.

El dominio y codominio de la transformación pueden ser diferentes. En cada caso, cambia la cantidad de coeficientes y su disposición en el vector salida, y eso se va representando con matrices de diferentes formas.

La forma y tamaño de una matriz se le conoce como su “dimensión”, y es la cantidad de filas por la cantidad de columnas que tiene. Así, una matriz que tiene 2 filas y 3 columnas es una matriz 2x3, una que tiene 4 filas y una sola columna es una matriz 4x1, una que tiene 1 fila y 5 columnas es una matriz 1x5, etc.

Si una matriz representa una transformación lineal, su dimensión depende de la dimensión de su dominio y de su codominio.

Si aumenta la dimensión del dominio, aumenta el tamaño del vector entrada, y con ello crece la cantidad de componentes a combinar linealmente en el vector salida. Esto se traduce en que la matriz va a tener más columnas.

En cambio, si aumenta la dimensión del codominio, aumenta el tamaño del vector salida, que conlleva más filas para la matriz.

En general, si el dominio tiene dimensión n, la matriz tiene n columnas. Por el otro lado, si el codominio tiene dimensión m, la matriz tiene m filas. Así, una transformación lineal que va de R^n a R^m, se representa por una matriz de dimensión mxn.

## Ahora hablemos de cómo exactamente las matrices transforman vectores.

Tomemos de ejemplo una transformación lineal de R^3 a R^2, que transforma este vector 3D (x, y, z) en un vector 2D de esta forma.

Cada una de las componentes de este vector 2D es, entonces, una combinación lineal de las componentes x, y, y z del vector entrada. Pero además, si te fijas, parecen productos punto. Recuerda que un producto punto entre dos vectores del mismo largo, consiste en multiplicar cada par de componentes entre los vectores, y luego sumar todos los resultados.

Entonces, cada combinación lineal se puede expresar como el producto punto entre: un vector de coeficientes, y un vector de los elementos (x, y, z), que es precisamente el vector entrada.

Esto también puede expresarse como una transformación lineal, que toma el vector (x, y, z) en R^3 y lo transforma en un escalar en R. La transformación se representa con una matriz de una sola fila, una matriz 1x3.

Si haces esto para cada componente del vector salida, te puedes dar cuenta que los vectores de coeficientes son precisamente las filas de la matriz. Entonces, cada componente del vector salida es un producto punto entre la fila correspondiente de la matriz, y el vector entrada.

Otro detalle importante, es que como ambas componentes del vector salida son combinaciones lineales de x, y, y z, el vector salida se puede descomponer en una suma de 3 vectores: uno que tenga las x, otro las y, y otro las z. Si en cada vector factorizamos por x, y, o z, obtenemos una combinación lineal entre 3 vectores constantes. Si te fijas, estos vectores son precisamente las columnas de la matriz. Más aún, la primera columna está siendo escalada por el primer coeficiente del vector entrada, x. La segunda columna la escala el segundo coeficiente, y, y la tercera la escala el tercer coeficiente, z.

En general, para una matriz de cualquier dimensión mxn, si la expresas como un conjunto de m filas, la transformación que representa retorna un vector cuyas componentes son productos punto entre cada fila y un vector entrada. En cambio, si la expresas como un conjunto de n columnas, el vector resultante es una combinación lineal de estas columnas, donde cada columna es escalada por el respectivo componente del vector entrada.

Volvamos al ejemplo de la transformación de R^3 a R^2, y expresémosla como una combinación lineal de sus columnas, porque hay más detalles importantes. Si pongo como entrada el vector (1, 0, 0), la primera columna se multiplica por 1, y las demás por 0. Esto significa que nos quedamos solo con la primera columna. Si la entrada es (0, 1, 0), la segunda columna se conserva y las demás se anulan, y si la entrada es (0, 0, 1) el resultado es la tercera columna.

Estos tres vectores unitarios se conocen como la “base canónica” de R^3, y con ellos un vector cualquiera (x, y, z) en R^3 se puede descomponer como x\*(1, 0, 0) + y\*(0, 1, 0) + z\*(0, 0, 1), que es una combinación lineal de estos vectores canónicos.

Imagina este caso: tienes una transformación lineal T de R^3 a R^2, pero no sabes a qué vector mapea un vector (x, y, z) cualquiera. Pero sí sabes que el vector (1, 0, 0) lo transforma en (4, 2). El vector (0, 1, 0) se transforma en (-1, 5), y el vector (0, 0, 1) se transforma en (3, -2). Esta información es suficiente para conocer bien la transformación, pues un vector (x, y, z) se puede descomponer en una combinación lineal de los vectores canónicos, así que tenemos T de esta combinación lineal.

Recordemos que una transformación lineal tiene dos propiedades importantes: preserva la suma, y preserva el producto por escalar. Así que, como se preserva la suma, esto es igual a T del primer vector, más T del segundo, más T del tercero. Y como se preserva el producto por escalar, se puede “sacar” el factor de cada transformación, quedándonos x\*T(1, 0, 0) + y\*T(0, 1, 0) + z\*T(0, 0, 1). Y ya sabemos de antemano cuál es el resultado de cada transformación: (4, 2), (-1, 5), y (3, -2).

Así, un vector (x, y, z) se mapea a esta combinación lineal, y ya sabemos que cada vector es una columna de la matriz que representa la transformación.

En general, si conocemos T de todos los vectores canónicos, podemos encontrar T de un vector cualquiera, de esta manera. Más aún, estas transformaciones pasan a ser las columnas de la matriz que representa a T.

Entonces, la primera columna nos dice a qué vector se mapea el primer vector canónico. La segunda columna dice a qué se mapea el segundo vector canónico, etc.

Por ejemplo, esta matriz de 3 columnas nos dice que el primer vector canónico, (1, 0, 0), se mapea al vector (4, 2). El segundo, (0, 1, 0), se mapea a (-1, 5), y el tercero, (0, 0, 1), se mapea a (3, -2).

**Con todo lo que hemos visto hasta ahora, podemos hablar de la representación geométrica de las transformaciones lineales.**

En el video anterior, teníamos la transformación lineal que mapeaba un vector (x, y) a un vector x\*(2, 1) + y\*(-1, 1), la cual ahora sabemos que se representa con esta matriz.

En ese video, hice un proyecto de GeoGebra donde mostraba la combinación lineal de estos vectores (2, 1) y (-1, 1). Ahí, dibujé una cuadrícula, y dije que cada punto representaba múltiplos enteros de estos vectores, pero no entré en muchos detalles. Ahora es buen momento para retomar ese tema.

A la izquierda, tenemos el plano de los vectores entrada; y a la derecha, el plano de los resultados de transformar los vectores de la izquierda con esta matriz. Las columnas de la matriz nos dicen que el vector (1, 0) se transforma en (2, 1), y el vector (0, 1) se transforma en (-1, 1). De ahora en adelante al vector (2, 1) le llamaré a, y al vector (-1, 1) le llamaré b.

Entonces, cualquier vector (x, y) se transforma a una combinación lineal de estos dos vectores, en particular se transforma en x\*a + y\*b.

Por ejemplo, si tomo el vector (1, 1) y lo transformo, obtengo el vector 1\*a + 1\*b, que se encuentra aquí, Si tomo el vector (2, 1), este vector se transforma en el vector 2\*a + 1\*b. El vector (3, 1) se transforma en 3\*a + 1\*b, y así. En general, todos los vectores que se encuentran en esta recta, es decir los vectores de la forma (x, 1), se transforman a vectores de la forma x\*a + b. Podemos representarlos dibujando el vector b, y partiendo de su punta dibujar el vector x\*a, y luego ir cambiando el valor de x. De esa manera, el vector resultante traza esta recta. Eso significa que nuestra recta horizontal en el plano izquierdo, se transforma en esta otra recta en el plano derecho.

Ahora hagamos lo mismo con esta otra recta horizontal, que es similar a la primera, pero trasladada una unidad hacia arriba, o lo que es lo mismo, trasladada en un vector (0, 1). Esta recta representa a todos los vectores de la forma (x, 2). Todos ellos se van a transformar en vectores x\*a + 2\*b, que se encuentran en esta otra recta en el plano derecho. Esta nueva recta es similar a la primera, pero trasladada en un vector b.

Si repetimos lo mismo con todas las rectas horizontales separadas por una unidad de distancia, obtenemos todas estas otras rectas que son básicamente copias de la misma recta pero trasladadas en algún múltiplo entero del vector b.

Podemos hacer lo mismo con las rectas verticales. Por ejemplo, la recta de vectores (1, y) es mapeada a la recta de vectores a + y\*b. Los vectores (2, y) son mapeados a 2\*a + y\*b, y así. Si transformamos todas estas rectas verticales, obtenemos varias rectas en el plano derecho, que son copias de una misma recta pero trasladadas en múltiplos enteros del vector a.

Así, la cuadrícula de la izquierda se transforma en esta cuadrícula de la derecha. Si te fijas, todas las rectas paralelas se quedan paralelas, y si más encima son equidistantes, es decir, se encuentran a la misma distancia entre sí, entonces se quedan equidistantes. Además, el origen, el vector (0, 0), se queda en su lugar.

Veamos otro ejemplo: una transformación lineal de R^2 a R^3, representada por esta matriz:  
( 2 1 | -1 2 | 0 3 )

A la izquierda tenemos entonces un plano donde ingresamos vectores, y a la derecha tenemos un espacio 3D a donde van a parar esos vectores al transformarse.

La primera columna de la matriz nos dice que el vector (1, 0) se transforma en el vector (2, -1, 0), y la segunda columna dice que el vector (0, 1) se transforma en (1, 2, 3).

Entonces, un vector (x, y) cualquiera se transforma en x\*(2, -1, 0) + y\*(1, 2, 3), que es una combinación lineal de los dos vectores anteriores.

Si te fijas, las combinaciones lineales de estos dos vectores no alcanzan a abarcar todo el espacio, sino solo una parte de este, que es un plano.

Si una transformación cumple estas tres propiedades, decimos que es lineal.

## Matrices especiales

Antes de terminar el video, quiero mostrar algunos casos especiales de transformaciones lineales y matrices.

Existen transformaciones que toman un vector y lo mapean a sí mismo. Por ejemplo, una transformación de R^3 a R^3 que transforma el vector (x, y, z) en (x, y, z).

Si una transformación genérica es de esta forma [[mostrar (x, y, z) -> (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)]], para que el vector salida sea (x, y, z), en el primer componente debemos settear el primer coeficiente en 1 y los demás en 0. En el segundo componente, el segundo coeficiente es 1 y los demás 0; y en el tercero, el tercer coeficiente es 1 y los demás 0.

Si recopilamos todos los coeficientes en una matriz, obtenemos esto:

Esta es una matriz cuadrada, es decir tiene la misma cantidad de filas como de columnas. Pero más importante, todos los coeficientes en su diagonal son 1, y los demás son todos 0.

Otra forma de llegar a lo mismo, sería tomar el vector salida y separarlo en tres vectores, uno con la x, otro con la y, y otro con la z, para luego expresar todo como una combinación lineal de vectores constantes. Como ya sabemos, estos vectores representan las columnas de la matriz, pero hay algo más: estos son los vectores canónicos. Y si ya sabemos que cada columna representa a dónde se mapea el respectivo vector canónico